Serpientes, escaleras y una conjetura de Merino y Welsh

Kolja Knauer
Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Jorge Ramírez Alfonsín

Instituto de Matemáticas - Unidad Juriquilla, UNAM
IMAG - Université Montpellier 2

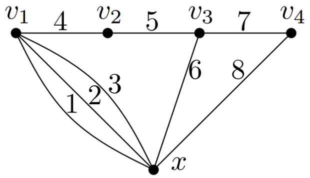
22 de octubre de 2015

Algunas ideas en gráficas

Consideremos una gráfica G y etiquetemos sus aristas

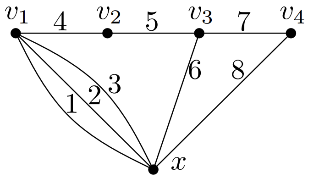
Algunas ideas en gráficas

Consideremos una gráfica G y etiquetemos sus aristas



Algunas ideas en gráficas

Consideremos una gráfica G y etiquetemos sus aristas



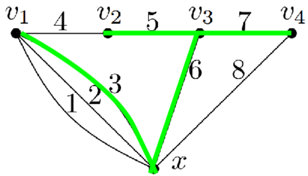
Nos interesan: los árboles generadores $\tau(G)$, las orientaciones acíclicas $\alpha(G)$ y las orientaciones totalmente cíclicas $\alpha^*(G)$.

Árboles generadores

Subgráficas sin ciclos cuyas aristas cubren todos los vértices

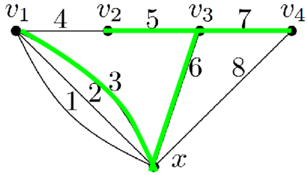
Árboles generadores

Subgráficas sin ciclos cuyas aristas cubren todos los vértices



Árboles generadores

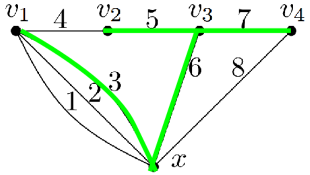
Subgráficas sin ciclos cuyas aristas cubren todos los vértices



Se muestra el árbol generador $\{3, 5, 6, 7\}$. Otros ejemplos son $\{2, 5, 7, 8\}$ y $\{1, 4, 5, 8\}$.

Árboles generadores

Subgráficas sin ciclos cuyas aristas cubren todos los vértices



Se muestra el árbol generador $\{3, 5, 6, 7\}$. Otros ejemplos son $\{2, 5, 7, 8\}$ y $\{1, 4, 5, 8\}$. Son 27 en total.

Árboles generadores

El conjunto de árboles generadores cumple

Árboles generadores

El conjunto de árboles generadores cumple

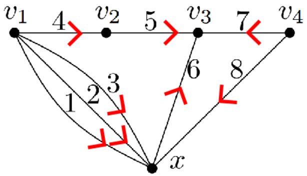
1. Ser no vacío
2. Si A y B son conjuntos de aristas de dos árboles generadores y hay un elemento $a \in A \setminus B$, entonces podemos encontrar un elemento $b \in B \setminus A$ tal que $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ es el conjunto de aristas de un árbol generador.

Orientaciones acíclicas

Dar una orientación a cada arista sin que aparezcan ciclos dirigidos

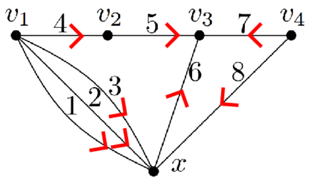
Orientaciones acíclicas

Dar una orientación a cada arista sin que aparezcan ciclos dirigidos



Orientaciones acíclicas

Dar una orientación a cada arista sin que aparezcan ciclos dirigidos



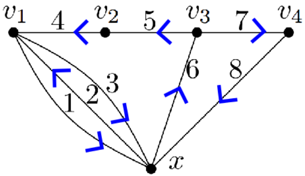
Son 42 en total.

Orientaciones totalmente cíclicas

Dar una orientación a cada arista de modo que cada arista esté en al menos un ciclo dirigido

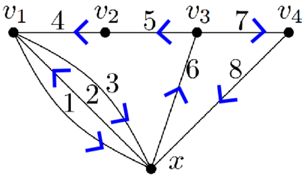
Orientaciones totalmente cíclicas

Dar una orientación a cada arista de modo que cada arista esté en al menos un ciclo dirigido



Orientaciones totalmente cíclicas

Dar una orientación a cada arista de modo que cada arista esté en al menos un ciclo dirigido



Son 42 en total.

Conjeturas de Merino-Welsh

Notemos que $\max\{42, 42\} \geq 27$.

Conjeturas de Merino-Welsh

Notemos que $\max\{42, 42\} \geq 27$. Se conjetura lo siguiente:

Conjeturas de Merino-Welsh

Notemos que $\max\{42, 42\} \geq 27$. Se conjetura lo siguiente:

Conjetura

Para cualquier gráfica G 2-conexa y sin bucles se cumple que:

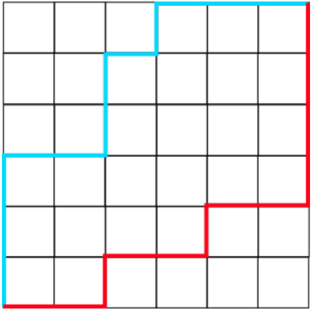
1. $\max(\alpha(G), \alpha^*(G)) \geq \tau(G)$.
2. *(Aditiva)* $\alpha(G) + \alpha^*(G) \geq 2 \cdot \tau(G)$.
3. *(Multiplicativa)* $\alpha(G) \cdot \alpha^*(G) \geq \tau(G)^2$.

Escaleras

- Tomamos m, n enteros positivos, un tablero de $m \times n$.
- Camino inferior P y uno superior Q (no se cruzan).

Escaleras

- Tomamos m, n enteros positivos, un tablero de $m \times n$.
- Camino inferior P y uno superior Q (no se cruzan).

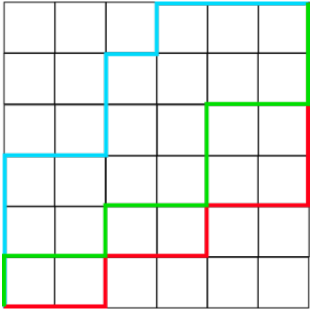


Caminos válidos

- Consideremos todos los caminos que quedan entre P y Q y suben o van a la derecha en cada paso.

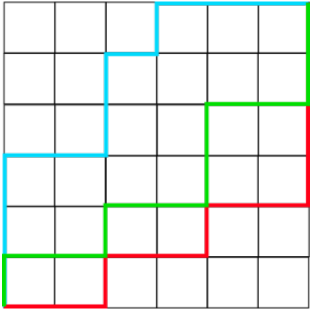
Caminos válidos

- Consideremos todos los caminos que quedan entre P y Q y suben o van a la derecha en cada paso.



Caminos válidos

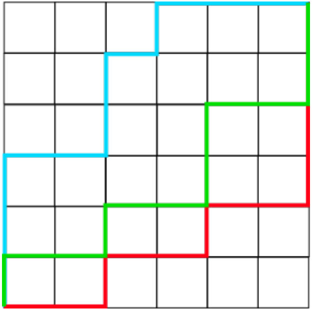
- Consideremos todos los caminos que quedan entre P y Q y suben o van a la derecha en cada paso.



Podemos identificarlos viendo en qué momentos se va hacia arriba.

Caminos válidos

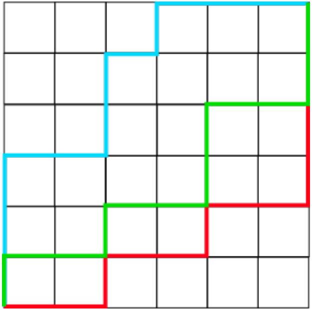
- Consideremos todos los caminos que quedan entre P y Q y suben o van a la derecha en cada paso.



Podemos identificarlos viendo en qué momentos se va hacia arriba. $\{1,4,7,8,11,12\}$.

Caminos válidos

- Consideremos todos los caminos que quedan entre P y Q y suben o van a la derecha en cada paso.



Podemos identificarlos viendo en qué momentos se va hacia arriba. $\{1,4,7,8,11,12\}$. Otro es $\{1,2,3,6,7,11\}$.

Caminos válidos

El conjunto de caminos válidos $\mathcal{B}$ cumple

Caminos válidos

El conjunto de caminos válidos $\mathcal{B}$ cumple

1. Ser no vacío
2. Si A y B están en $\mathcal{B}$ y hay un elemento $a \in A \setminus B$, entonces podemos encontrar un elemento $b \in B \setminus A$ tal que $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ está en $\mathcal{B}$.

Caminos válidos

El conjunto de caminos válidos $\mathcal{B}$ cumple

1. Ser no vacío
2. Si A y B están en $\mathcal{B}$ y hay un elemento $a \in A \setminus B$, entonces podemos encontrar un elemento $b \in B \setminus A$ tal que $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ está en $\mathcal{B}$.

Son las mismas propiedades que para los conjuntos de aristas de árboles generadores.

Caminos válidos

El conjunto de caminos válidos $\mathcal{B}$ cumple

1. Ser no vacío
2. Si A y B están en $\mathcal{B}$ y hay un elemento $a \in A \setminus B$, entonces podemos encontrar un elemento $b \in B \setminus A$ tal que $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ está en $\mathcal{B}$.

Son las mismas propiedades que para los conjuntos de aristas de árboles generadores.
Un *matroide* está formado por un conjunto inicial E y un conjunto de *bases* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$, de modo que $\mathcal{B}$ cumple 1. y 2.

Independientes

- A cualquier subconjunto de un camino válido le llamaremos un conjunto *independiente*. Podríamos hacer esto mismo para gráficas.

Independientes

- A cualquier subconjunto de un camino válido le llamaremos un conjunto *independiente*. Podríamos hacer esto mismo para gráficas.
- Para un conjunto A de números (aristas) definimos $r(A)$ como la cardinalidad del máximo independiente contenido en A.

Independientes

- A cualquier subconjunto de un camino válido le llamaremos un conjunto *independiente*. Podríamos hacer esto mismo para gráficas.
- Para un conjunto A de números (aristas) definimos $r(A)$ como la cardinalidad del máximo independiente contenido en A.
- Una herramienta algebraica que guarda mucha información es el *polinomio de Tutte*, un polinomio en dos variables x y y definido como sigue:

Independientes

- A cualquier subconjunto de un camino válido le llamaremos un conjunto *independiente*. Podríamos hacer esto mismo para gráficas.
- Para un conjunto A de números (aristas) definimos $r(A)$ como la cardinalidad del máximo independiente contenido en A.
- Una herramienta algebraica que guarda mucha información es el *polinomio de Tutte*, un polinomio en dos variables x y y definido como sigue:

$$T(M; x, y) = \sum_{A \subset E} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)}.$$

Polinomio de Tutte

En tableros, $T(M; 1, 1) =$ número de caminos válidos.

Polinomio de Tutte

En tableros, $T(M;1,1) =$ número de caminos válidos.
En gráficas:

- $T(M;1,1) =$ árboles generadores
- $T(M;2,0) =$ orientaciones acíclicas
- $T(M;0,2) =$ orientaciones totalmente cíclicas

Polinomio de Tutte

En tableros, $T(M;1,1) =$ número de caminos válidos.
En gráficas:

- $T(M;1,1) =$ árboles generadores
- $T(M;2,0) =$ orientaciones acíclicas
- $T(M;0,2) =$ orientaciones totalmente cíclicas

El polinomio de Tutte se puede obtener recursivamente

Conjeturas de Merino-Welsh

Conjetura (Matroidal Merino-Welsh conjectures)

Sea M un matroide sin bucles ni cobucles y T_M su polinomio de Tutte. Entonces:

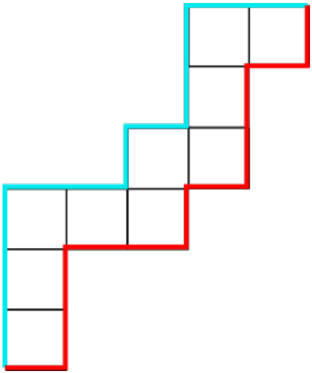
1. $\max(T_M(2,0), T_M(0,2)) \geq T_M(1,1)$.
2. *(Aditiva)* $T_M(2,0) + T_M(0,2) \geq 2 \cdot T_M(1,1)$.
3. *(Multiplicativa)* $T_M(2,0) \cdot T_M(0,2) \geq T_M(1,1)^2$.

Serpientes

Si P y Q encierran una banda de ancho 1, decimos que tenemos una *serpiente*.

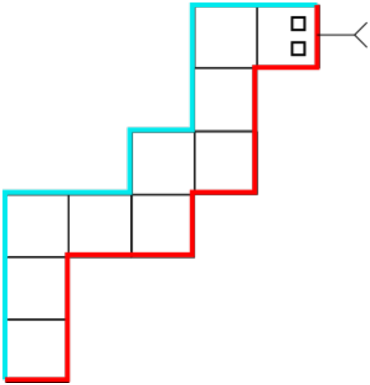
Serpientes

Si P y Q encierran una banda de ancho 1, decimos que tenemos una *serpiente*.



Serpientes

Si P y Q encierran una banda de ancho 1, decimos que tenemos una *serpiente*.

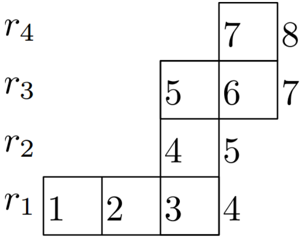


Ejemplo de caminos en serpientes

Consideremos la siguiente serpiente:

Ejemplo de caminos en serpientes

Consideremos la siguiente serpiente:



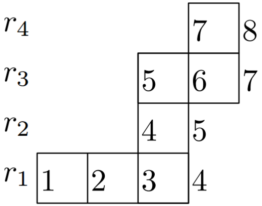
Un camino válido es $\{3, 5, 6, 7\}$. Otros son $\{2, 5, 7, 8\}$ y $\{1, 4, 5, 8\}$

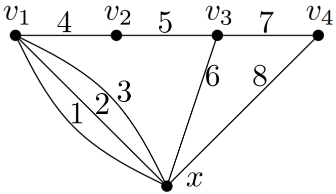
Correspondencia

De hecho, existe una correspondencia entre caminos de la serpiente y árboles generadores de una gráfica.

Correspondencia

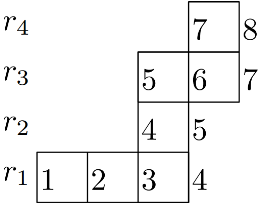
De hecho, existe una correspondencia entre caminos de la serpiente y árboles generadores de una gráfica.

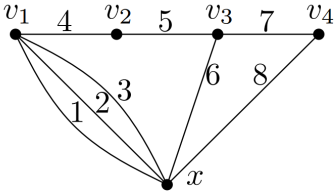




Correspondencia

De hecho, existe una correspondencia entre caminos de la serpiente y árboles generadores de una gráfica.

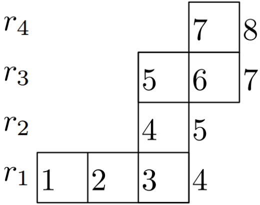


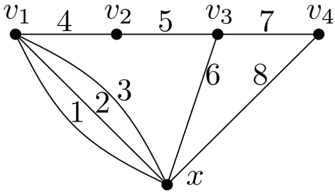


Cuando existe una gráfica correspondiente al tablero, decimos que el matroide obtenido es *gráfico*.

Correspondencia

De hecho, existe una correspondencia entre caminos de la serpiente y árboles generadores de una gráfica.

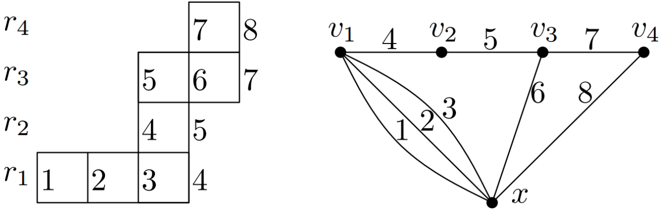




Cuando existe una gráfica correspondiente al tablero, decimos que el matroide obtenido es *gráfico*. No todos los tableros dan matroides gráficos.

Correspondencia

De hecho, existe una correspondencia entre caminos de la serpiente y árboles generadores de una gráfica.



Cuando existe una gráfica correspondiente al tablero, decimos que el matroide obtenido es *gráfico*. No todos los tableros dan matroides gráficos. ¿Cuáles lo hacen?

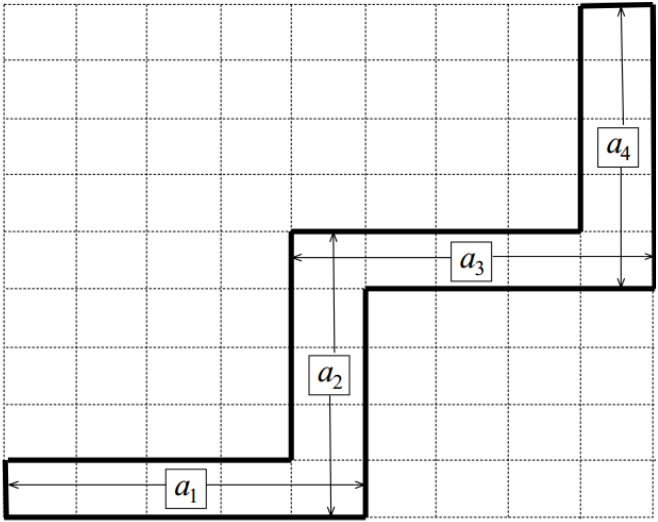
Resultados

Teorema

Dado un tablero, son equivalentes:

- *Que el tablero sea una serpiente*
- *Que el matroide obtenido sea gráfico*
- *Que el matroide obtenido sea binario*

Resultados



Resultados

Sea $F(n)$ el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos $b = (b_1, \ldots, b_n)$ de longitud n sin unos consecutivos.

Resultados

Sea $F(n)$ el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos $b = (b_1, \ldots, b_n)$ de longitud n sin unos consecutivos.

Proposición

La cantidad de caminos en la serpiente $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es

$$\sum_{b \in F(n+1)} \prod_{i=1}^{n} (a_i - 1)^{1-|b_{i+1}-b_i|}.$$

Resultados

Sea $F(n)$ el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos $b = (b_1, \ldots, b_n)$ de longitud n sin unos consecutivos.

Proposición

La cantidad de caminos en la serpiente $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es

$$\sum_{b \in F(n+1)} \prod_{i=1}^{n} (a_i - 1)^{1-|b_{i+1}-b_i|}.$$

Proposición

El producto $\alpha \cdot \alpha^*$ para la serpiente $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es

$$4 \cdot \prod_{i=1}^{n} (2^{a_i} - 1).$$

Resultados

Teorema

Sea M un matroide de caminos latices sin bucles ni cobucles que no sea una suma directa de serpientes triviales. Entonces

$$T_M(2,0) \cdot T_M(0,2) \geq \frac{4}{3} \cdot T_M(1,1)^2$$

Resultados

Teorema

Sea M un matroide de caminos latices sin bucles ni cobucles que no sea una suma directa de serpientes triviales. Entonces

$$T_M(2,0) \cdot T_M(0,2) \geq \frac{4}{3} \cdot T_M(1,1)^2$$

Este teorema resuleve la conjetura de Merino-Welsh para matroides de caminos latices y caracteriza los matroides para los que se da la igualdad.

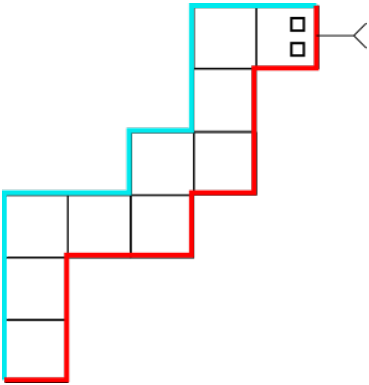
Esbozo de la demostración

- Probamos el resultado para serpientes conexas
- Mostramos que cualquier MCL es una serpiente conexa, o tiene un elemento e tal que tanto $M \setminus e$ como M/e son MCL conexos con menos elementos.
- Enunciamos y mostramos un lema sencillo para probar la desigualdad para M a partir de la desigualdad para $M \setminus e$ y M/e.
- Extendemos el resultado para MCL disconexos, pero sin bucles ni cobucles.

Agradecimiento y contacto

¡Gracias por su atención!

¡Gracias por su atención!



http://blog.nekomath.com - leomtz@im.unam.mx